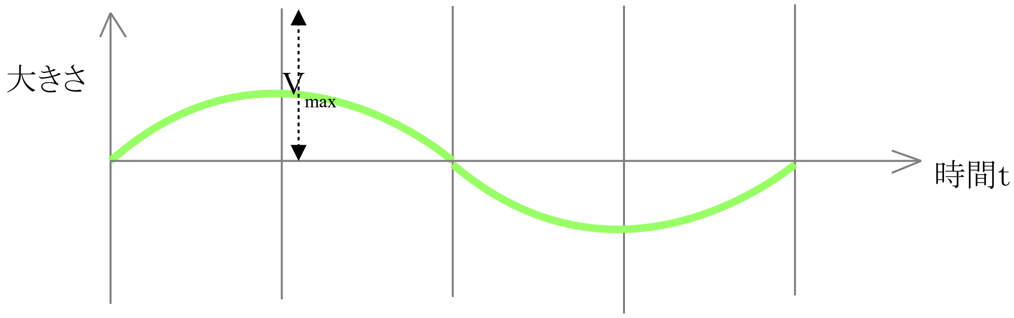
音楽（音）の仕組み（音律の数学的解析）-純正率と平均律　　2023.7.27 初版

音楽に使われる音とは何か？また、音階”ドレミファソラシド”はどのように成り立っているのか？といったことを数学的（物理的）に解析して、現代の音楽に使われる平均率と、その起源である純正率といった仕組みについて考えていきます。

1. 音の仕組み

”音”というのは、空気の振動によって伝わってきます。
その振動は波として表わされ、綺麗な波として正弦波で表わすことができます。
実際の世の中の様々な音はもっと複雑で幾つもの波が複数かさなって成り立っています。
まずここではその基本となる一つの波（正弦波）について述べてみます。



このような綺麗な正弦波を数式で表わすと、

$f(t) = V_{max} \cdot \sin(t)$　　　【V_{max} は最大値の大きさ＝音の大きさ(Volume)を表わす】

となります。
（注：sin 関数は実際角度を引数にするのでtはちょうど360°で一周期となる時間で示します）

この正弦波の一つを一周期として連続的に繰り返して振動することで、
連続した音となって空気を伝わって人の耳に聞こえてくるのが音となります。

そしてこの波が一秒間に何回振動するかによって、音の高低が変化します。
この音の高さのことを周波数（f）といい、Hz（ヘルツ）という単位記号で表わされます。

一秒間にn回振動する場合、その周波数fは、n（Hz）

$f(n) = n$　（Hz）

となります。

正弦波の一周期の時間を、周期（T）で表わし、周波数との関係は

$T = 1 / n$　（秒）

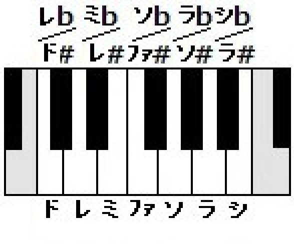
で表わされます。

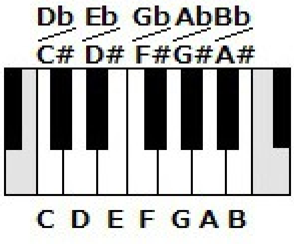
2. 音の高さの定義

音の高さを周波数fで表わすことを先に述べましたが、この高さが異なる複数の音によって音楽は奏でられます。

現在の音楽の音は、”ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ”と言った音階で表わされ、
実際にはその**半音階**を含めると、”ド、ド#、レ、レ#、ミ、ファ、ファ＃、ソ、ソ＃、ラ、ラ＃、シ”と12音で成り立っています。(＃は一つ上の音の♭と異名同音となります。例:ド＃＝レ♭･･･等)

ピアノの鍵盤で見てみると、





のように配列されています。(右図は英語表記)

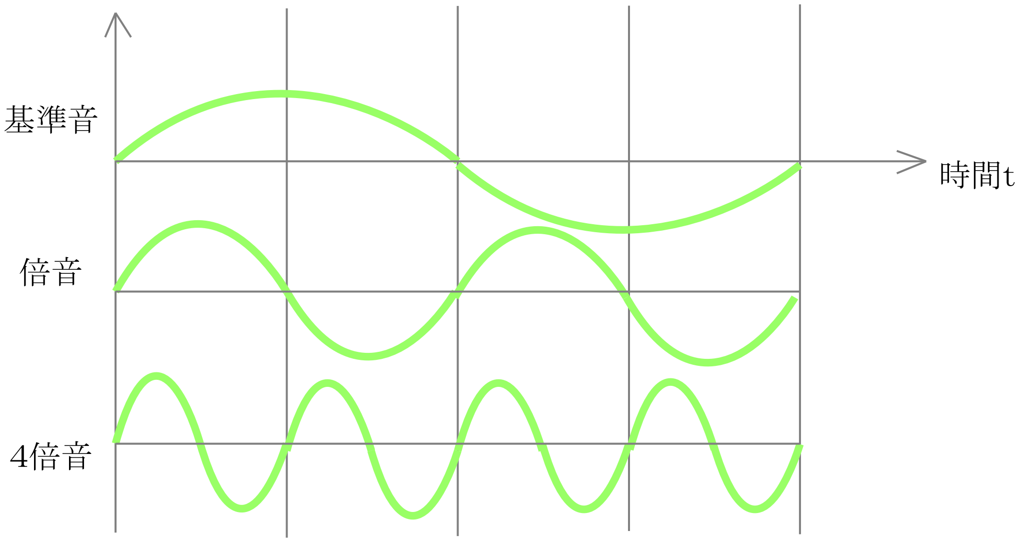
また、音の高さは、ある音の周波数に対して、ちょうど 2 倍の周波数になる音との関係を、**1オクターブ**といい、1オクターブ上の同音(倍音)としての関係が成り立ちます。
ドの音を基準に、一つ上の高いドの音の高さ(周波数)を表わすと

ドの周波数×2 ＝ 一つ上の高いドの周波数

ここでさらに一つ上のドの音の高さは、さらに 2 倍となり、元の基準からすると4倍の高さになります。

ドの周波数×4 ＝ 二つ上の高いドの周波数

このように、1オクターブごとに、倍、倍と音の周波数は高くなっていきます



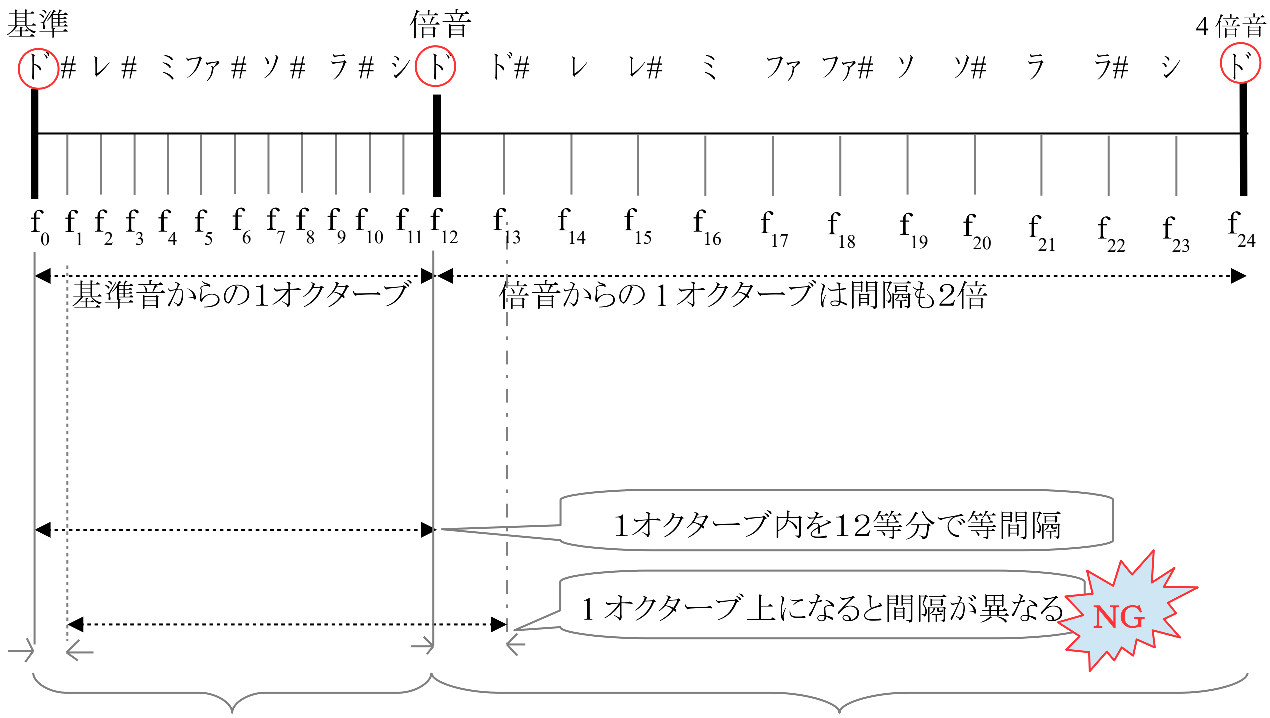
3. 平均律の音の高さ

平均律は現代音楽の基本となる音律で、1オクターブを12等分した音律で、それぞれの12の音程をのどこを基準にしても１オクターブ内の音程の関係が、同じ関係を保たれているものである。

これは、ドを基準とした12音程と、レを基準とした12音程、ミを基準とした12音程・・・・・・・とどこからを基準にしても同じ関係性を保つことで、転調や移調をしても安定した調和が得られるものとなっている。

12等分と述べましたが、実際、基準音から１オクターブ間を単なる周波数を12等分したのでは、１オクターブ上の倍音の場合は1オクターブの周波数間隔も２倍になるので、１オクターブ上の12当分した周波数間隔も２倍となり、この倍、ドを基準としたドから高いドの関係と、レを基準とした場合の関係性は崩れてしまします。（下図参照）

（f_0、f_1、・・・f_nは各音の周波数（Hz）を示したもの）



１オクターブ内だけを均等割しても 関係性は保てない。

fn=f0+(f12-f0)/12　(0=<n<=12)とでも表記か？ しかしオクターブ上（n>12）では成り立たない

このように単なる周波数の12等分では転調・移調時の音階が**同じ関係性を保てていない**ことになり、これでは平均律は成り立ちません。

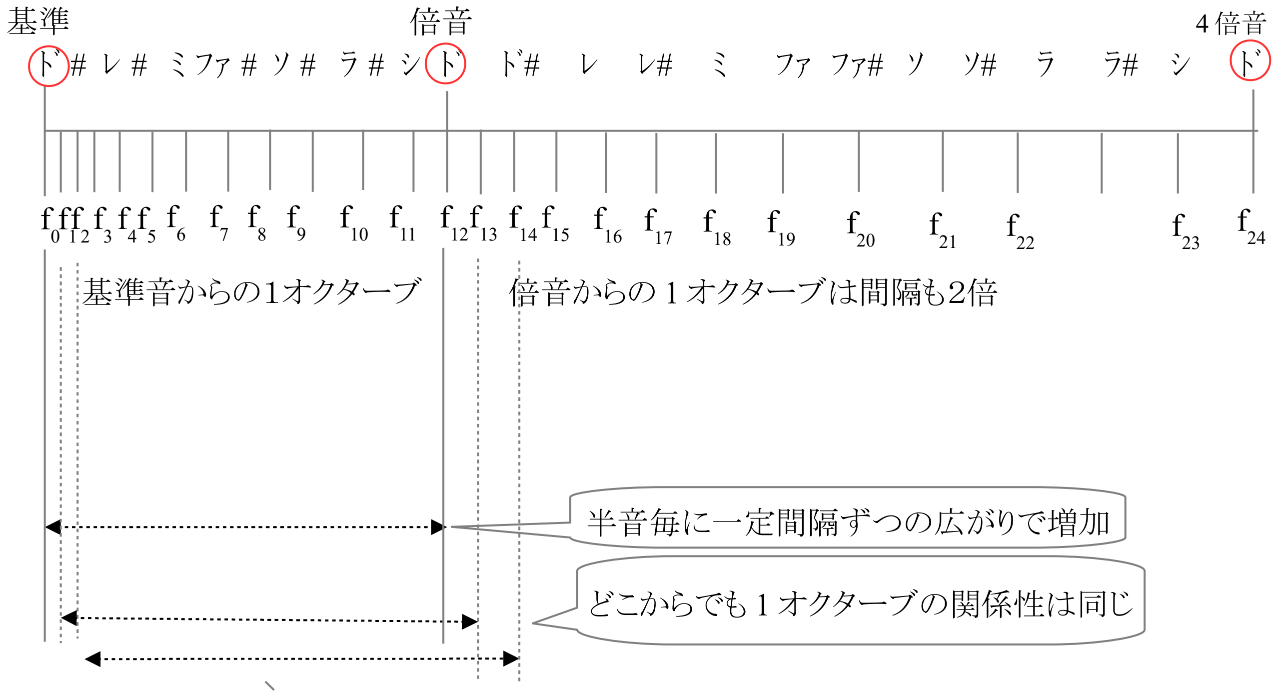
それではどうするかというと、基準音から倍音の関係が周波数が2倍であることから、

$f_{12}=f_0\times2$　$f_{24}=f_{12}\times2=f_0\times4=f_0\times2^2$　・・・・・・となり

どこから基準にしてもこの2倍の関係が同じになるように12当分するためには、

$$f_n = f_0 \times 2^{n/12} \quad \text{(Hz)}$$

という関係にすると、丁度n＝12の時に基準音 f_0に対して、2^1倍すなわち2倍となり、
n＝24の時に基準音 f_0に対して、2^2倍すなわち4倍となり、つじつまが合う。
またこれだと基準値を f_0以外にしたときも関係性が崩れない。



この場合、一つ一つの**隣合う音同士の周波数の比率が全て等しい**と言えます。
すなわち、

$$f_n = f_0 \times 2^{n/12}$$
$$f_{n-1} = f_0 \times 2^{(n-1)/12}$$

とすると、

$$\begin{aligned} f_n / f_{n-1} &= (f_0 \times 2^{n/12}) / (f_0 \times 2^{(n-1)/12}) \\ &= 2^{n/12} / 2^{(n-1)/12} \\ &= 2^{n/12-(n-1)/12} = 2^{1/12} \end{aligned}$$

から

$$f_n = f_{n-1} \times 2^{1/12}$$

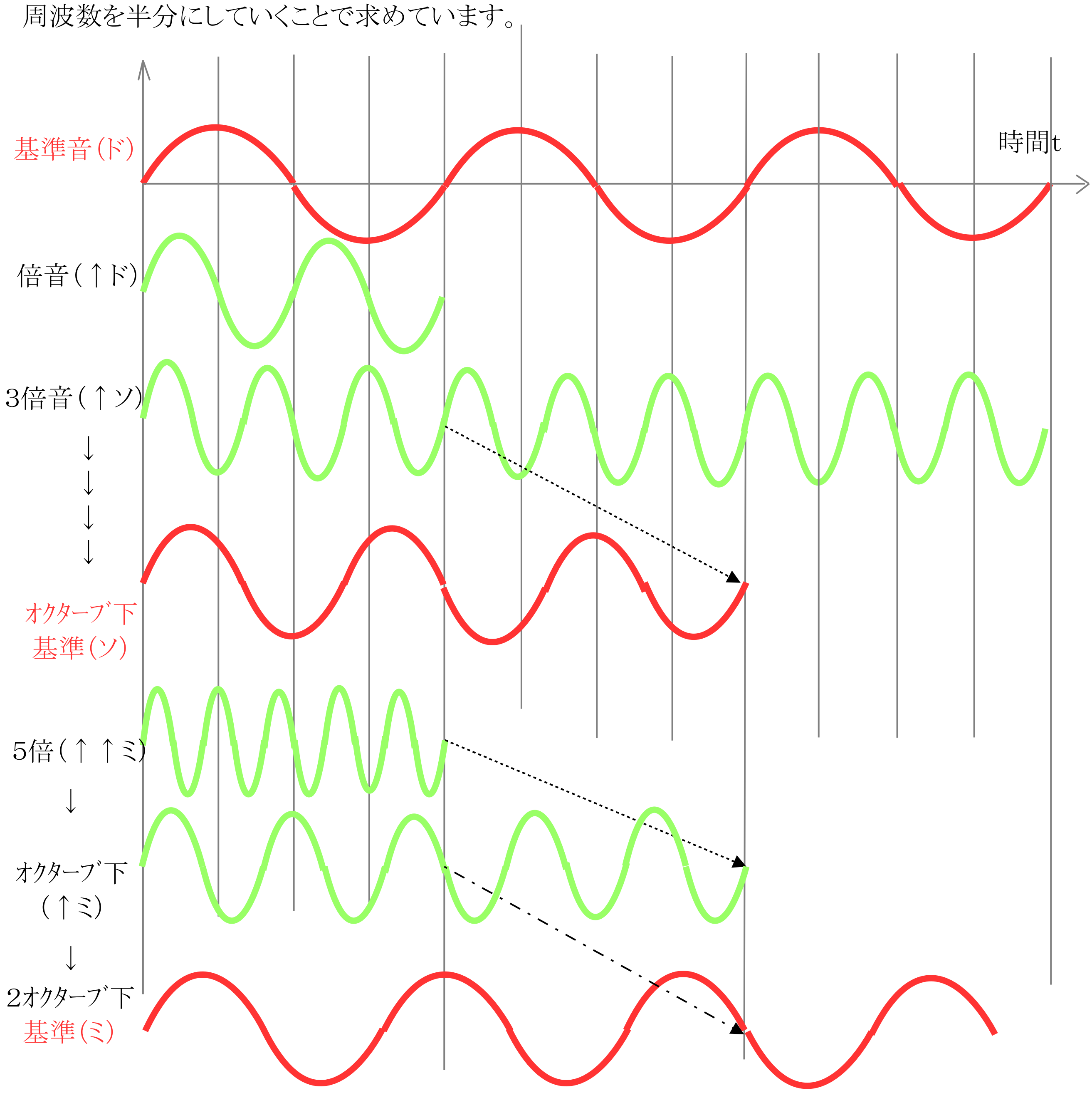
となり、**隣同士の音の周波数の比率**は、$2^{1/12}$ （≒1.059463）と一定の間隔比率となることが分かります。すなわち、どこからを基準にしても同じ関係性を保ち転調や移調をしても安定した調和が得られる音律となり、これが平均律の論理となります。

4. 純正律の音の高さ

一方、純正率とは、**各音の周波数比が簡単な整数比**となるように決めたものとなります。

例えば、”ドミソ”といった和音は3つの音の周波数が混在して合成した音となりますが、各音の周波数比が簡単な整数比であると、合成された音が共鳴して綺麗な和音に聞こえます。
一方、整数比でない平均律の場合は、周波数のずれが、うなりとなって聞こえて綺麗な和音にならないことになります。

以下に基準音からの倍音、倍音、と求めてそれを最初の基準音のオクターブに収まるように周波数を半分にしていくことで求めています。



このように、基準音(ド)からの3倍音は1オクターブ上のソの音になるので、それを半分にして基準のソを求めます。(基準音の3／2倍)
さらに、基準音(ド)からの5倍音は2オクターブ上のミの音になるので、半分にして１オクターブ上のミ、さらに半分にして基準音のミが求まります(基準音の5／3倍)

　このように求めた音で構成する和音（ドミソ）は同時にならすと、お互いに一定毎に波の節が一致して繰り返すため、協調して合成されるが綺麗に響くことになります。

　一方、先の平均律だと、このように波の重なりがずれて、綺麗な波の合成とならず、**"うなり"**が発生して、"わぉーんわぉーん"といった感じで不快な感じになります。

このように**ドミソの関係**が、ドを1としてミとソが5／4、3／2倍の周波数の関係が成り立ちます。
1　：　5／4　：　3／2を整数比にすると　すなわち**4　：　5　：　6の関係**となります。
この関係は長3和音（ドミソ）の関係となります。

これ以外の音について純正律でどのようになるかを考えると、
ファーラードの関係で高いドを２倍のドと考え、ファ:ラ:2＝4:5:6の関係を当てはめると
ファ　：　ラ　：　ド　＝　4／3　：　5／3　：　2　となります。
また、ソーシー（レ）のの関係でソを3／2倍として、4:5:6の関係に当てはめると
ソ　；　シ　：　（↑レ）　＝　3／2　：　15／8　：　（9／4）
と求まります。
　しかし、レに関しては、1オクターブ上のレなので、基準音のオクターブに合わせると、
1オクターブ下なのでさらに1／2倍でレは基準音の9／8倍ということになる

別のレの求め方として、
ソの基準音のドの3／2倍の周波数を3倍した音を2オクターブ上のレ（9／2倍）として考えて、
それを2オクターブ下げ、1/（2×2）倍し、基準音から9／8倍の音として表わします。
（結局さきの比率から求めたのと同じ数値となる）

半音階　ド＃／レ♭、レ＃／ミ♭、ファ＃／ソ♭、ソ＃／ラ♭、ラ＃／シ♭　は、
ミとファ、シとドが半音階であることから、その比率をもとめると、
　5／4:4／3　＝　1:1:16／15
　15／8:2　＝　1:16／15
となり、**半音階の比率を、1:16／15**として求めます。

実際は、求める半音階の半音下の音を16／15倍した比率と、半音上の音を15／16倍した比率の2つの単純な値を使用することで求めます。
ド＃:ドの(16/15)倍 = 1*(16/15) = 16/15
レ♭:レの(15/16)倍 = (9/8)*(15/16) = 135/128　→単純な 16/15 を採用
レ＃:レの(16/15)倍 = (9/8)*(16/15) = 6/5
ミ♭:ミの(15/16)倍 = (5/4)*(15/16) = 75/64 →単純な 6/5 を採用
ファ＃:ファの(16/15)倍 = (4/3)*(16/15) = 64/45
ソ♭:ソの(15/16)倍 = (3/2)*(15/16) = 45/32 →単純な 45/32 を採用
ソ＃:ソの(16/15)倍 = (3/2)*(16/15) = 8/5
ラ♭:ラの(15/16)倍 = (5/3)*(15/16) = 25/16 →単純な 8/5 を採用
(ラ＃:ラの(16/15)倍 = (5/3)*(16/15) = 16/9)
(シ♭:シの(15/16)倍 = (15/8)*(15/16) = 225/128 →単純な 16/9 を採用？)
ラ＃／シ♭に関しては、ドーミーソの 1:5/4:3/2 の関係を利用し、(ミ-ドは 4/5 倍、ミ-ソは 6/5 倍)
レの周波数 9/8 の長三度下として ラ# = (9/8)*(4/5) = 9/10　をオクターブ上げて 9/5　あるいは
ソの周波数 3/2 の短三度上として ラ# = (3/2)*(6/5) = 9/5　で求めた方が調和して聞こえるので採用されてます。

半音階の比率は明確な規定はなく、各自の解釈が必要らしいです。

以上から、”ドレミファソラシド”の周波数関係と半音階も同様に求めたものを以下に示します。

音階	周波数比	半音階	周波数比
ド	1	ー	ー
ー	ー	ド＃／レ♭	16／15
レ	9／8	ー	ー
ー	ー	レ＃／ミ♭	6／5
ミ	5／4	ー	ー
ファ	4／3	ー	ー
ー	ー	ファ＃／ソ♭	45／32
ソ	3／2	ー	ー
ー	ー	ソ＃／ラ♭	8／5
ラ	5／3	ー	ー
ー	ー	ラ＃／シ♭	9／5
シ	15／8	ー	ー
ド	2	ー	ー

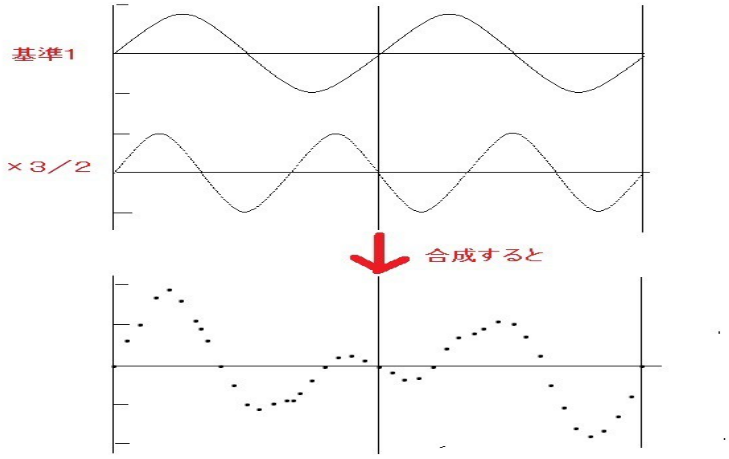
5．平均律と純正率の音の実際の周波数の比較

実際の周波数について、ラを基準＝440 Hzとした音階（A メジャー、イ長調）で示します。

n	音階名	平均律（Hz）	純正律（Hz）
0	ラ	440	440
2	シ	493．88	495
4	ド＃	554．37	550
5	レ	587．33	586．57
7	ミ	659．25	660
9	ファ＃	739．99	733．33
11	ソ＃	830．61	825
12	ラ	880	880

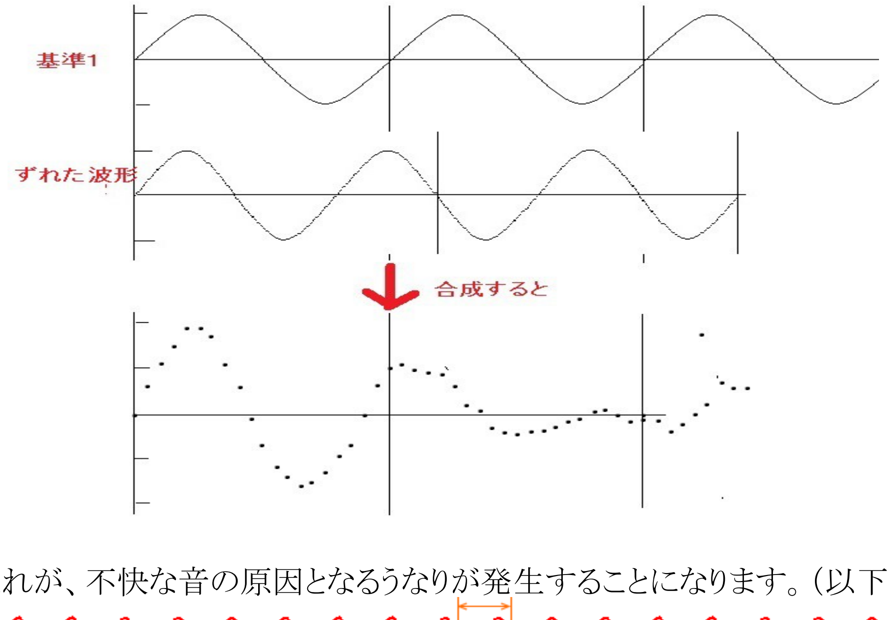
【参考】 音のうなりについて

二つの波形の周波数比が整数比となる場合の音が合わさる例として、ド(基準 1)とソ(3/2倍)を合成すると下記の図のように途中崩れるが、ある一定周期で波の節が揃い同じ波が繰り返されている。

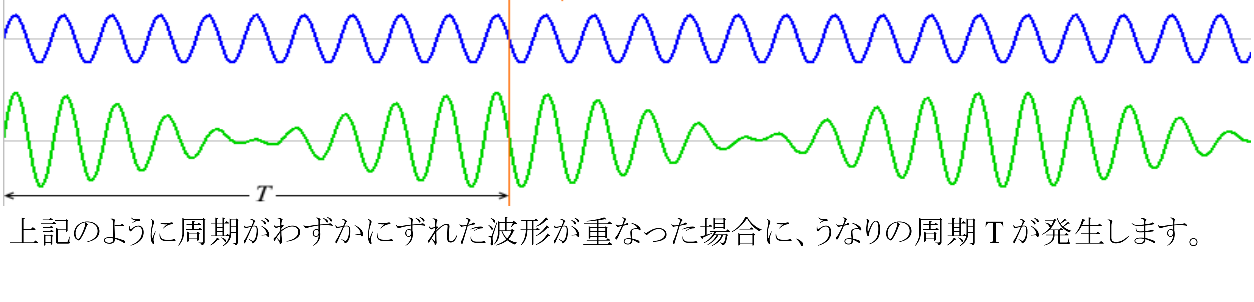


一定周期で繰り返しが起こることで、心地よい合成音となり調和されたハーモニーとなる。
このことを、音の共鳴という。共鳴は同一周波数同士だと一番強く共鳴し、これを第一共鳴、2倍の周波数との共鳴を第二共鳴・・・、と整数比の波で共鳴が起きます。
（比が大きくなると下記のうなりの影響が大きく表れてきます）

それに対して、基準音から整数比ではなく、ずれた波形を合成すると、下記図のようにとりとめもなく、いつ繰り返しがあるか分からないようないびつな波形となる。



これが、不快な音の原因となるうなりが発生することになります。（以下はうなりの波形例）



上記のように周期がわずかにずれた波形が重なった場合に、うなりの周期 T が発生します。

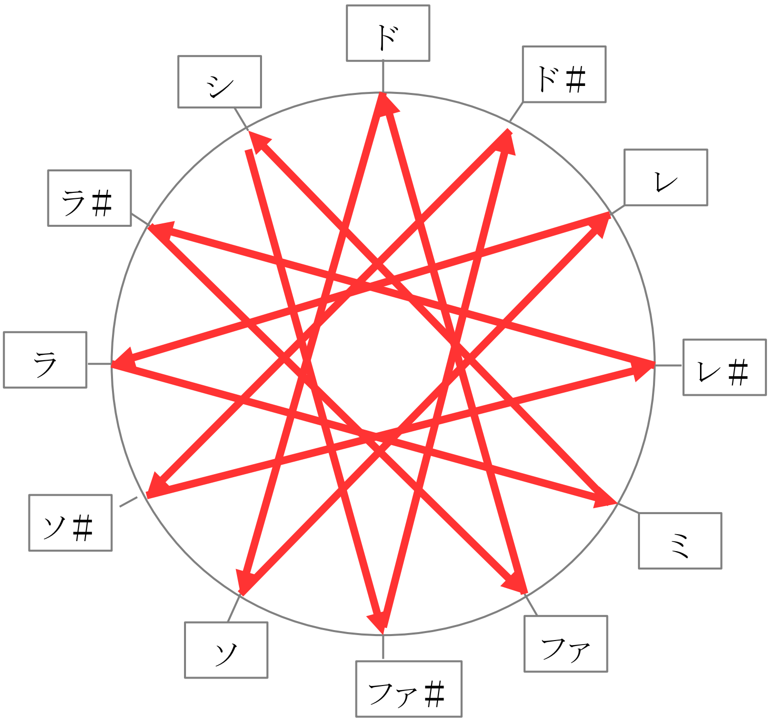
6．　ピタゴラス音律について

全ての音の周波数比を 完全5度の関係で1:3／2からのみ導き出した音律です。
ドとソの関係（完全5度の関係）が1:3／2であることから、同様にソとレも1:3／2としてレの比律をもとめます。このときオクターブ上になっ多分1/2倍にして基準音（ド）のオクターブ範囲でもとめます。するとレは$(3／2)^2$ × 1／2 ＝9／8倍と求めます。
さらにレからラ、ラからミ、ミからシ、シからファ＃・・・と求めていくと、

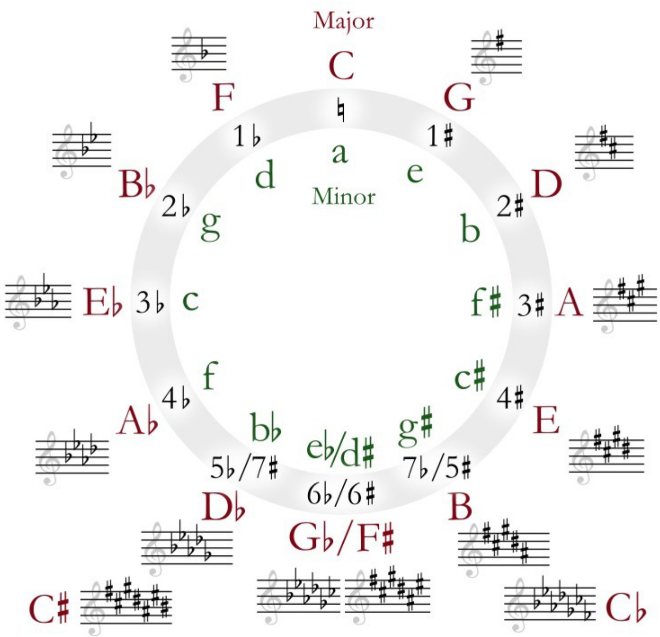
音程	計算式	比率
ド（基準）	1／1	1
ソ	3／2	3／2
レ	$(3/2)^2 \times 1/2$	9／8
ラ	$(3/2)^3 \times 1/2$	27／16
ミ	$(3/2)^4 \times (1/2)^2$	81／64
シ	$(3/2)^5 \times (1/2)^2$	243／128
ファ＃	$(3/2)^6 \times (1/2)^3$	729／512
ド＃	$(3/2)^7 \times (1/2)^4$	2187／2048
ソ＃	$(3/2)^8 \times (1/2)^4$	6561／4096
レ＃	$(3/2)^9 \times (1/2)^5$	19683／16384
ラ＃	$(3/2)^{10} \times (1/2)^5$	59049／32768
ファ	$(3/2)^{11} \times (1/2)^6$	177147／131072
ド（↑）	$(3/2)^{12} \times (1/2)^6$	531441／262144＝2，0272・・

基準のドに対して1オクターブ上のドの比率が2にならないこと,からオクターブ上の同音が揃わず微妙に違いがでてくることという問題があります。

完全5度で求める考えを以下のように円として表わすと分かりやすい。



完全５度を隣同士で並べた円を5thCircle(5度圏サークル)と言っている。



【結論】

平均律は1オクターブを12の音で均等比率で分割することで、転調、移調をしても
安定した調和が取れるが、和音の重なりでうなりが生じて不快な音が感じられます。

純正律は、各音の周波数比が簡単な整数比となるように決めたもので、
和音の重なりでのうなりが少なく調和したきれいな音で重なるが、転調、移調した場合に、
不安定な音となり調和が取れなくなります。

ピタゴラス音律は、完全5度の調和がよく、明るい響きとなり調律もしやすいという利点もあるが
オクターブでの音のずれが発生し、不協和感を感じる場合があるという短所がある。

【参考情報】

Wikipedia ”純正律” ”平均律” ”ピタゴラス律” ”5度圏” ”音響共鳴” 等
分かりやすい高校物理の部屋　うなり　https://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/wave/unari/unari.html
YAHOO 知恵袋　純正律について　https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12283475472